CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE TPC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer leurs réponses.

EXERCICE 1

Partie I - Questions préliminaires

Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. On se place dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, le $\mathbb{R}-$ espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On confondra de façon usuelle un polynôme avec sa fonction polynomiale associée.
On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de E.
Enfin, on définit l'application f sur E par :

$$f : P \mapsto (X - X^2)P'' + (1 - 2X)P'.$$

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q2. Calculer $f(1), f(X)$ et $f(X^k)$ pour $k \in [\![2, n]\!]$. Déterminer ensuite la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E.

Q3. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (P, Q) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x)dx. \end{array}$$

a) Rappeler la définition d'un produit scalaire sur E.

b) Montrer que φ est effectivement un produit scalaire sur E.

Par la suite, on pourra noter $\langle P, Q\rangle$ au lieu de $\varphi(P, Q)$. La norme associée à φ sera notée $||.||$.

Partie II - Étude du cas $n = 2$

Dans cette partie, on prend $n = 2$. On a donc $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$.
E est muni du produit scalaire φ défini en **Q3b**.

Q4. Soit A_2 la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de E. Montrer que :

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Q5. L'endomorphisme f est-il bijectif ? Justifier.

Q6. Préciser les valeurs propres de f.
Peut-on, à ce stade, conclure à la diagonalisabilité de f ?

Q7. Déterminer des bases des sous-espaces propres de f (le terme de degré 0 de chaque vecteur des bases sera pris égal à 1).

Q8. **a)** Déterminer une matrice P, inversible, telle que :

$$A_2 = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} P^{-1}, \text{ avec } \alpha > \beta > \gamma.$$

Préciser α, β, γ.

b) Calculer P^{-1}.

Q9. On considère maintenant les polynômes :

$$L_0 = 1, \quad L_1 = 1 - 2X, \quad L_2 = 1 - 6X + 6X^2\,.$$

a) Montrer que $\mathcal{L} = (L_0, L_1, L_2)$ est une base orthogonale de E. On rappelle que E est muni du produit scalaire φ étudié dans la partie I.

b) Calculer $||L_0||$ et $||L_1||$.

c) Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$.

d) Rappeler la définition de Π_1, projection orthogonale de E sur $\mathbb{R}_1[X]$.
Soit $P_2 = X^2$. Exprimer $\Pi_1(P_2)$ en fonction de $L_0,\ L_1$ et de L_2.
On demande ici de faire explicitement les calculs.

e) Montrer que la distance de P_2 au plan vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ vérifie :

$$d(P_2,\, \mathbb{R}_1[X]) = \frac{1}{6\sqrt{5}}.$$

EXERCICE 2

Pour l'ensemble de l'exercice, on considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \int_0^1 \frac{1}{\left(1+t^3\right)^n}\, dt\,.$$

Q10. Calculs préliminaires

a) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ \frac{1}{1+t^3} = \frac{a}{1+t} + \frac{b\,(2t-1)}{t^2-t+1} + \frac{c}{t^2-t+1}\,.$$

b) Soit la fonction $\Phi : t \mapsto \arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$. Calculer sa dérivée.

c) En utilisant les questions précédentes, montrer que :

$$u_1 = \alpha \ln(2) + \beta\pi\,.$$

Préciser les valeurs de α et de β.

Q11. Étude de la suite $(\boldsymbol{u_n})$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq 1\,.$$

b) Montrer que la suite (u_n) est monotone.

c) Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ que l'on ne demande pas de calculer.

Q12. Étude de la série $\sum \boldsymbol{u_n}$

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1],\ \dfrac{1}{(1+t)^n} \leq \dfrac{1}{\left(1+t^3\right)^n}$.

b) Établir le résultat : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t)^n}\,dt \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

c) En déduire la nature de la série numérique $\sum u_n$.

Q13. Étude de la série $\sum \dfrac{\boldsymbol{u_n}}{\boldsymbol{n}}$

a) En écrivant $\dfrac{1}{(1+t^3)^n} = \dfrac{1}{(1+t^3)^n} \cdot 1$, effectuer une intégration par parties dans l'expression de u_n et montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n), telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = a_n + b_n(u_n - u_{n+1})\,.$$

Identifier les expressions de a_n et de b_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En utilisant le développement en série entière de $\ln(1-x)$, établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n2^n}$ et montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln(2)$.

c) Déduire des questions **Q13a** et **Q13b** que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{u_n}{n}$ converge et calculer sa somme.

On exprimera le résultat en fonction de ℓ défini à la question **Q11c**.

Q14. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n}\,dt$.

a) Montrer que la suite (v_n) est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En utilisant les résultats des questions **Q10a** et **Q10b**, déterminer la valeur de v_1.

c) En comparant les termes généraux u_n et v_n pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la nature de la série $\sum v_n$.

d) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}\,v_n\,.$$

On pourra utiliser une intégration par parties similaire à celle de la question **Q13a**.

e) En déduire le résultat :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ v_n = \frac{2 \times 5 \times \cdots \times (3n-4)}{3^n \times (n-1)!}\,\frac{2\,\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

EXERCICE 3

Les questions **Q17** à **Q19** peuvent être traitées sans avoir abordé les questions **Q15** et **Q16**.

Soient $p \in]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $q = 1 - p$.
Une entreprise dispose de N machines identiques en service. Chaque machine a, chaque jour, une probabilité égale à p de tomber en panne, indépendamment des autres. Lorsqu'une machine tombe en panne, elle est retirée définitivement du service.
Au jour numéro 0, toutes les machines sont en service.

Pour $i \in [\![1, N]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au numéro du jour où la $i^{\text{ème}}$ machine tombe en panne.

Q15. **a)** Justifier que X_1 suit la loi géométrique de paramètre p notée $\mathcal{G}(p)$.
Préciser l'univers-image $X_1(\Omega)$ et pour $k \in X_1(\Omega),\ P(X_1 = k)$.
Donner enfin l'espérance de X_1.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $P(X_1 > k) = q^k$. En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ P_{X_1 > n}\left(X_1 > k + n\right) = P\left(X_1 > k\right).$$

Pourquoi peut-on dire que la loi de X_1 est sans mémoire ?

Toutes les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_N$ sont donc indépendantes et suivent la même loi géométrique de paramètre p.
On pose pour la suite de l'exercice : $Y = \max\{X_1, \ldots, X_N\}$.

Q16. **a)** Expliquer pourquoi la variable aléatoire Y désigne le numéro du jour où la machine la plus robuste tombe en panne.
Préciser l'univers image $Y(\Omega)$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier brièvement que :

$$(Y \leq k) = \bigcap_{i=1}^{N} (X_i \leq k),$$

puis montrer que $P(Y \leq k) = (1 - q^k)^N$.

c) Pour $k \in \mathbb{N}$, justifier que : $P(Y \leq k-1) + P(Y = k) = P(Y \leq k)$.

d) Soit $k \in Y(\Omega)$, déduire de la question **Q16c** l'expression de $P(Y = k)$ en fonction des paramètres q, k et N.

Q17. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - (1 - q^n)^N$.

a) Déterminer un équivalent de $(1 + x)^N - 1$ lorsque x tend vers 0.
En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

On admet, pour toute la suite de l'exercice, que l'on a : $E(Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

c) Lorsque $N = 2$, calculer $E(Y)$.

On cherche maintenant à déterminer un équivalent de $E(Y)$ *lorsque* $N \to +\infty$.

Q18. Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 1 - (1 - q^x)^N$.

a) Montrer que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} N q^x$. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$, $q^x = e^{x \ln q}$.

b) i) À l'aide d'une suite géométrique, montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} q^x (1 - q^x)^k.$$

ii) Soit $k \in [\![0, N-1]\!]$.

À l'aide du changement de variable $t = q^x$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} q^x (1 - q^x)^k dx$.

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\frac{1}{\ln q} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$.

c) i) Justifier que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

ii) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq u_n.$$

iii) En déduire : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{N+1} f(x)dx \leq \sum_{n=0}^{N} u_n \leq \int_0^{N} f(x)dx + 1$.

iv) Conclure enfin que :

$$-\frac{1}{\ln q} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \leq E(Y) \leq 1 - \frac{1}{\ln q} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.$$

Q19. On admet le résultat classique $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \underset{N \to +\infty}{\sim} \ln N$.

Déterminer un équivalent simple de $E(Y)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

Interpréter le résultat obtenu pour les machines de l'entreprise.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 22 1187 – D'après documents fournis